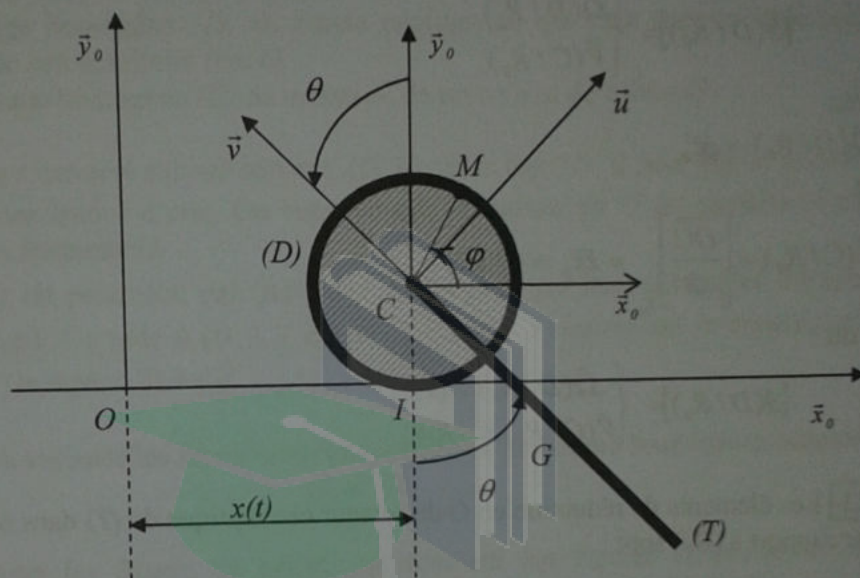
Exercice n° 1 : mouvement d'un système pendulaire

Notions abordées

- **Condition de roulement sans glissement**
- **Torseur cinématique**

Soit le système *(S)* constitué des deux solides suivants :

- *(D)* est un disque de masse m_1, de centre C et de rayon R.
- *(T)* est une tige rectiligne de masse m_2, de centre d'inertie G et de longueur $2L$.



La tige *(T)* est articulée sur le disque *(D)* par une liaison rotoïde sans frottement d'axe $(C,\vec{z}_0)$.

Le disque roule sans glisser sur l'axe $(O,\vec{x}_0)$ du repère de référence $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.

On notera I le point de *(D)* en contact avec l'axe $(O,\vec{x}_0)$.

Les paramètres la position de *(S)* sont :

- $x(t)$ l'abscisse du centre C de *(D)*.
- $\varphi(t)=(\vec{x}_0,\overrightarrow{CM})$ où M est un point lié à *(D)* (voir figure).
- $\theta(t)=(\vec{x}_0,\vec{u})=(\vec{y}_0,\vec{v})$.

Q1- Montrer que la condition de roulement sans glissement au point I de *(D)* sur l'axe $(O,\vec{x}_0)$ est : $\dot{x}+R\dot{\varphi}=0$

Dans la suite du problème cette relation sera prise en compte.

Q2- Déterminer les éléments de réduction en C du torseur cinématique de *(D)* dans son mouvement par rapport à (R_0).

Q3- Donner l'élément de réduction en G du torseur cinématique de *(T)* dans son mouvement par rapport à (R_0).

Solution détaillée

R1- $\vec{V}(I \in D/R_0) = \vec{V}(C \in D/R_0) + \vec{\Omega}(D/R_0) \wedge \overrightarrow{CI} = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{\varphi}\vec{z}_0 \wedge (-R\vec{y}_0) = (\dot{x} + R\dot{\varphi})\vec{x}_0$

La condition de roulement sans glissement impose :

$\vec{V}(I \in D/R_0) = \vec{0}$

soit : $\dot{x} + R\dot{\varphi} = 0$

R2- Les éléments de réduction en C du torseur cinématique de *(D)* dans son mouvement par rapport à (R_0) sont :

$$[\vartheta(D/R_0)] = {}_C\begin{cases}\vec{\Omega}(D/R_0) \\ \vec{V}(C/R_0)\end{cases}$$

avec

$\vec{\Omega}(D/R_0) = \dot{\varphi}\vec{z}_0$

et

$$\vec{V}(C/R_0) = \left[\frac{\overrightarrow{OC}}{dt}\right]_{R_0} = \dot{x}\vec{x}_0 = -R\dot{\varphi}\vec{x}_0$$

d'où :

$$[\vartheta(D/R_0)] = {}_C\begin{cases}\vec{\Omega}(D/R_0) = \dot{\varphi}\vec{z}_0 \\ \vec{V}(C/R_0) = -R\dot{\varphi}\vec{x}_0\end{cases}$$

R3- Les éléments de réduction en G du torseur cinématique de *(T)* dans son mouvement par rapport à (R_0) sont :

$$[\vartheta(T/R_0)] = {}_G\begin{cases}\vec{\Omega}(T/R_0) \\ \vec{V}(G/R_0)\end{cases}$$

avec

$\vec{\Omega}(T/R_0) = \dot{\theta}\vec{z}_0$

et

$$\vec{V}(G/R_0) = \vec{V}(C/R_0) + \vec{\Omega}(T/R_0) \wedge \overrightarrow{CG} = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{\theta}\vec{z}_0 \wedge (-L\vec{v}) = \dot{x}\vec{x}_0 + L\dot{\theta}\vec{u} = -R\dot{\varphi}\vec{x}_0 + L\dot{\theta}\vec{u}$$

d'où :

$$\boxed{[\vartheta(T/R_0)] = {}_G\begin{cases}\vec{\Omega}(T/R_0) = \dot{\theta}\vec{z}_0 \\ \vec{V}(G/R_0) = -R\dot{\varphi}\vec{x}_0 + L\dot{\theta}\vec{u}\end{cases}}$$

Exercice n° 2 : mouvement d'un disque en liaison verrou avec un axe mobile

Notions abordées

- **Figures de calcul**
- **Nombre de degrés de liberté**
- **Vecteur instantané de rotation**

Soit $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct, avec $(O,\vec{z}_0)$ vertical ascendant, supposé galiléen. Le système étudié *(S)* est composé :

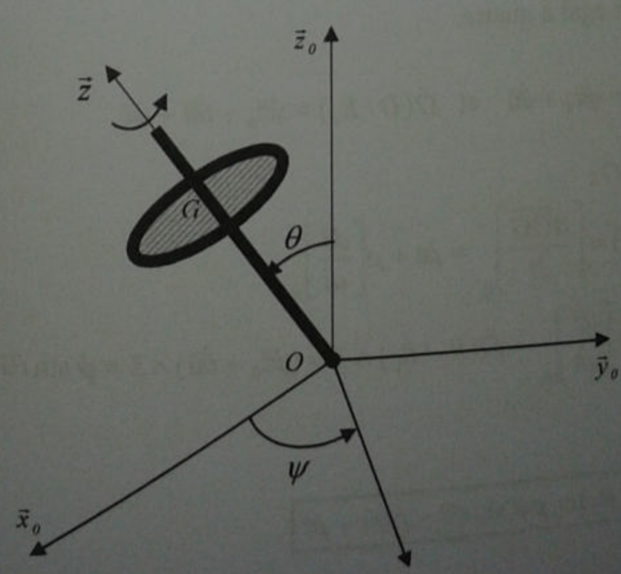
- d'une tige homogène *(T)*, de masse négligeable qui peut tourner librement autour de son extrémité fixe *O*.
- d'un disque homogène *(D)* de masse *m*, de rayon *a* et de centre *G*.

Le disque *(D)* est traversé suivant son axe $(G,\vec{z})$ par la tige *(T)*. Il peut glisser suivant la tige et tourner autour d'elle. On suppose que la liaison en *O* est parfaite et on néglige tous les frottements.

Le système *(S)* est paramétré par ρ tel que $\overrightarrow{OG}=\rho\vec{z}$ et par les trois angles d'Euler habituels (ψ,θ,φ). On note $R_1(O,\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$ et $R_2(O,\vec{u},\vec{w},\vec{z})$ les repères intermédiaires et $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ le repère lié à *(S)*.

Les grandeurs vectorielles seront exprimées dans la deuxième base intermédiaire $(\vec{u},\vec{w},\vec{z})$

Q1- Représenter les figures de calcul : montrer sur des figures claires les trois rotations planes représentant les angles d'Euler et qui font passer de (R_0) à (R).



Q2- Quel est le nombre de degré de liberté du système.

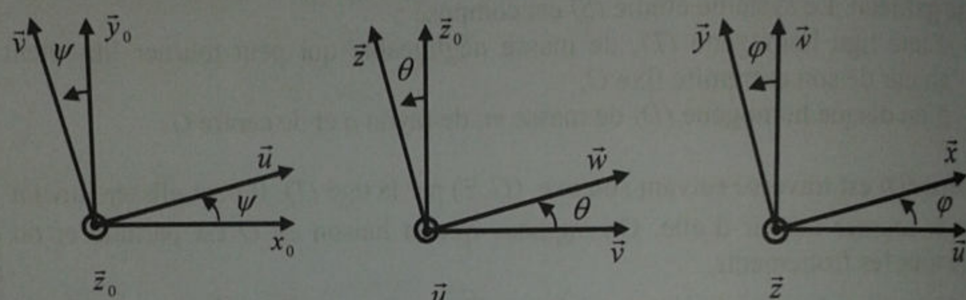
Q3- Déterminer les vecteurs rotation $\vec{\Omega}(T/R)$ et $\vec{\Omega}(D/R_0)$.

Q4- Calculer le vecteur vitesse $\vec{V}(G/R_0)$.

Q5- Calculer le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(G/R_0)$.

Solution détaillée

R1- Figures de calcul



R2- Le mouvement du système *(S)* par rapport à (R_0) dépend des paramètres suivants :

- ψ *et* θ qui déterminent la position de la tige *(T)* par rapport à (R_0).
- ρ qui détermine la position du centre G du disque sur la tige.
- φ qui représente la rotation propre du disque *(D)* autour de la tige.

On en déduit que le nombre de degré de liberté du système *(S)* dans son mouvement par rapport à (R_0) est égal à quatre.

R3- $\vec{\Omega}(T/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u}$ et $\vec{\Omega}(D/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{z}$

R4- Vitesse de G :

$$\vec{V}(G/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_{R_0} = \dot{\rho}\vec{z} + \rho\left[\frac{d\vec{z}}{dt}\right]_{R_0}$$

$$\left[\frac{d\vec{z}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{z}}{dt}\right]_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{z} = (\dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u}) \wedge \vec{z} = \dot{\psi}\sin\theta\vec{u} - \dot{\theta}\vec{w}$$

d'où :

$$\boxed{\vec{V}(G/R_0) = \rho\dot{\psi}\sin\theta\vec{u} - \rho\dot{\theta}\vec{w} + \dot{\rho}\vec{z}}$$

R5- Accélération de G :

$$\vec{\Gamma}(G/R_0)=\left[\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt}\right]_{R_0}=\left[\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt}\right]_{R_2}+\vec{\Omega}(R_2/R_0)\wedge\vec{V}(G/R_0)$$

$$=(\dot{\rho}\dot{\psi}\sin\theta+\rho\ddot{\psi}\sin\theta+\rho\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta)\vec{u}-(\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta})\vec{w}+\ddot{\rho}\vec{z}+\left|\begin{array}{l}\dot{\theta}\\ \dot{\psi}\sin\theta\\ \dot{\psi}\cos\theta\end{array}\right._{R_2}\wedge\left|\begin{array}{l}\rho\dot{\psi}\sin\theta\\ -\rho\dot{\theta}\\ \dot{\rho}\end{array}\right._{R_2}$$

$$=(\dot{\rho}\dot{\psi}\sin\theta+\rho\ddot{\psi}\sin\theta+\rho\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta)\vec{u}-(\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta})\vec{w}+\ddot{\rho}\vec{z}+\left|\begin{array}{l}\dot{\rho}\dot{\psi}\sin\theta+\rho\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta\\ \rho\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta-\dot{\rho}\dot{\theta}\\ -\rho\dot{\theta}^2-\rho\dot{\psi}^2\sin^2\theta\end{array}\right._{R_2}$$

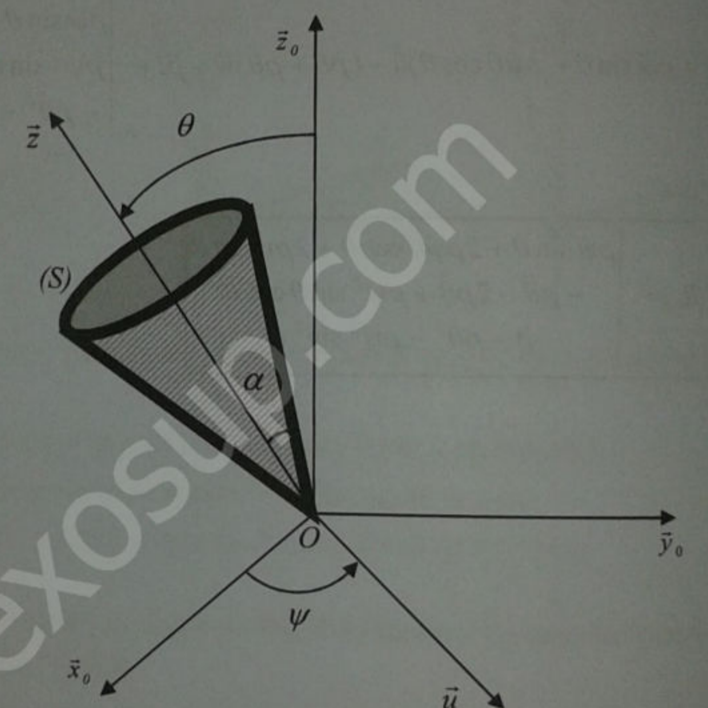
d'où :

$$\boxed{\vec{\Gamma}(G/R_0)=\left|\begin{array}{c}\rho\ddot{\psi}\sin\theta+2\rho\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta+2\dot{\rho}\dot{\psi}\sin\theta\\ -\rho\ddot{\theta}-2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta\\ \ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2-\rho\dot{\psi}^2\sin^2\theta\end{array}\right._{R_2}}$$

Exercice n° 3 : mouvement d'une toupie

Notions abordées

- **Nombre de degrés de liberté**
- **Torseur cinématique**
- **Angles d'Euler**
- **Vitesse angulaire de rotation**



Le solide étudié *(S)* est un cône plein homogène de masse m, de sommet O, d'axe de révolution $(O,\vec{z})$. de hauteur h, de demi-angle au sommet α et dont la base circulaire a pour rayon a.

On désigne par $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct supposé galiléen. Au cours de son mouvement, *(S)* se déplace dans un champ de pesanteur uniforme $\vec{g}=-g\vec{z}_0$ et son sommet O reste fixe au contact d'un plan horizontal. On désigne par $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère orthonormé direct lié à *(S)* et par $\vec{u}$ le vecteur unitaire de la perpendiculaire commune à $\vec{z}$ *et* $\vec{z}_0$ orienté de telle sorte que le trièdre $(\vec{z}_0,\vec{z},\vec{u})$ soit direct (voir figure). On désigne par $R_1(O,\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$ et $R_2(O,\vec{u},\vec{w},\vec{z})$ les deux repères intermédiaires et par (ψ,θ,φ) les angles d'Euler habituels.

Les grandeurs vectorielles seront exprimées dans la deuxième base intermédiaire $(\vec{u},\vec{w},\vec{z})$

Q1- Quel est le nombre de degré de liberté de *(S)* ?

Q2- Définir les angles d'Euler (ψ, θ, φ) de *(S)* dans son mouvement par rapport à (R_0).

Q3- Déterminer le torseur cinématique en O de *(S)* par ses composantes dans (R_2).

Q4- Déterminer la vitesse angulaire ω de rotation de *(S)* autour de son axe de révolution $(O, \vec{z})$.

Solution détaillée

R1- Dans le cas général un solide possède six degrés de liberté. Dans le cas étudié *(S)* garde un point fixe et ne possède donc que trois degrés de liberté de rotation.

R2- Les angles d'Euler sont :

- l'angle de précession $\psi = (\vec{x}_0, \vec{u}) = (\vec{y}_0, \vec{v})$ associé à la rotation $(\psi / \vec{z}_0)$.
- l'angle de nutation $\theta = (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{z}_0, \vec{z})$ associé à la rotation $(\theta / \vec{u})$.
- l'angle de rotation propre $\varphi = (\vec{u}, \vec{x}) = (\vec{w}, \vec{y})$ associé à la rotation $(\varphi / \vec{z})$.

R3- Le torseur cinématique en O de *(S)* dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$[\vartheta(S/R_0)] = {}_O\begin{cases} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(O \in S/R_0) \end{cases}$$

avec $\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{z} = \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\psi}\sin\theta\vec{w} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{z}$ et $\vec{V}(O \in S/R_0) = \vec{0}$ car O est un point fixe dans (R_0).

R4- On a : $\omega = \vec{\Omega}(S/R_0).\vec{z} = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta$

Exercice n° 4 : mouvement d'une barre rigide

Notions abordées :

- **Torseur cinématique**
- **Relation de Varignon**
- **Trajectoire d'un point d'un solide**

Dans un repère fixe $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, on considère une barre rigide *(S)* de longueur $2l$ et d'épaisseur négligeable. Les extrémités A et B de *(S)* glissent le long des axes $(O, \vec{x}_0)$ et $(O, \vec{y}_0)$ respectivement (liaisons linéiques annulaires). On note G le centre d'inertie de la barre.

Soit $R(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à la tige tel que $\overrightarrow{AB} = 2l\vec{y}$, $\overrightarrow{AP} = r\vec{y}$ et $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x})$.

Q1- Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de l, $\theta, \vec{x}_0$ *et* $\vec{y}_0$.

Q2- Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OG}$ en fonction de l, $\theta, \vec{x}_0$ *et* $\vec{y}_0$. Quelle est alors la trajectoire du point G ?

Q3- Exprimer $\overrightarrow{OP}$ en fonction de $l,\ \theta, r, \vec{x}_0$ *et* $\vec{y}_0$. Quelle est alors la trajectoire du point P ?

Q4- Déterminer le torseur cinématique $[\vartheta(S/R_0)]$ au point A.

Q5- Calculer $\vec{V}(B/R_0)$ par dérivation.

Q6- Retrouver $\vec{V}(B/R_0)$ en utilisant la relation de Varignon.

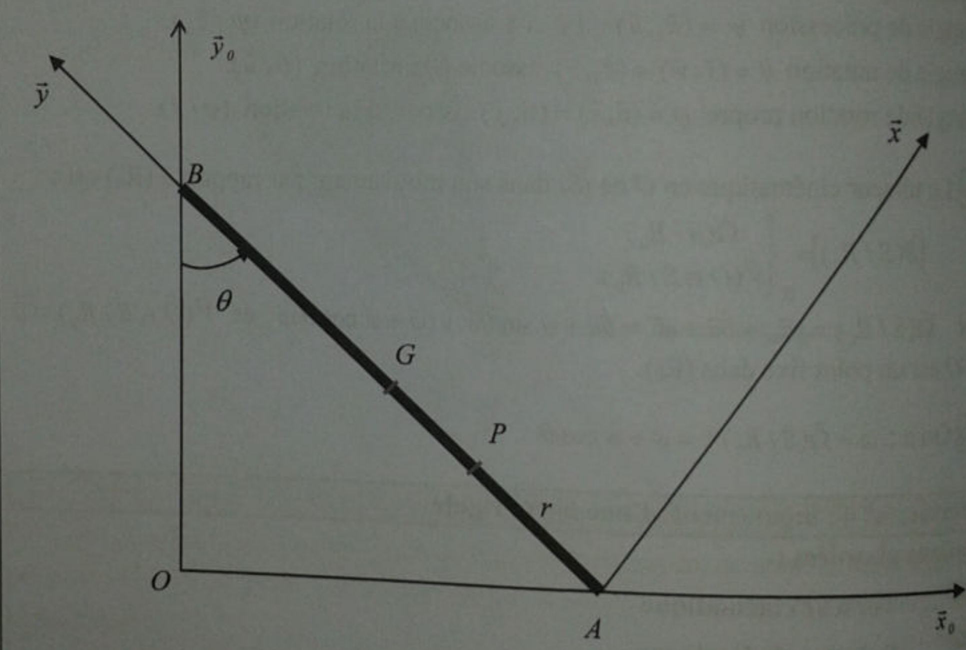
Q7- Déterminer le torseur cinématique $[\vartheta(S/R_0)]$ au point G.

Q8- Calculer $\vec{\gamma}(A/R_0)$.

Q9- Calculer $\vec{\gamma}(B/R_0)$.

Q10- Calculer $\vec{V}(P/R_0)$.

Q11- Vérifier en prenant $r = l$ et $r = 2l$ que vous retrouverez $\vec{V}(G/R_0)$ et $\vec{V}(B/R_0)$.



Solution détaillée

R1-

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 2l(\cos\theta\vec{y}_0 - \sin\theta\vec{x}_0)}$$

R2-

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OA} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2} = l(\sin\theta\vec{x}_0 + \cos\theta\vec{y}_0)}$$

$\|\overrightarrow{OG}\| = l = Cte$, le point G est à une distance constante du point fixe O. Donc la trajectoire est un quart de cercle de centre O et de rayon l.

R3- $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AP} = 2l\sin\theta\vec{x}_0 + \dfrac{r}{2l}\overrightarrow{AB} = (2l-r)\sin\theta\vec{x}_0 + r\cos\theta\vec{y}_0$.

$\overrightarrow{OP} = X_P\vec{x}_0 + Y_P\vec{y}_0$ Avec $\begin{cases} X_P = (2l-r)\sin\theta \\ Y_P = r\cos\theta \end{cases}$

d'où :

$$\boxed{\frac{X_P^2}{(2l-r)^2} + \frac{Y_P^2}{r^2} = 1}$$

c'est l'équation cartésienne d'une ellipse de centre O, d'axes Ox_0 et Oy_0 et de demi-axes $a = 2l - r$ et $b = r$.

R4- Le torseur cinématique $[\vartheta(S/R_0)]$ au point A est :

$$[\vartheta(S/R_0)] = {}_A\begin{cases} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(A \in S/R_0) \end{cases}$$

avec :

$$\boxed{\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\theta}\vec{z}_0}$$

et

$$\boxed{\vec{V}(A \in S/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right]_{R_0} = 2l\dot{\theta}\cos\theta\vec{x}_0}$$

R5-

$$\boxed{\vec{V}(B \in S/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right]_{R_0} = -2l\dot{\theta}\sin\theta\vec{y}_0}$$

R6-

> **Conseil méthodologique :** lorsque l'on utilise la relation de Varignon, il faut obligatoirement passer par un point qui appartient au solide étudié. Ici, A appartient bien au solide.

$\vec{V}(B \in S/R_0) = \vec{V}(A \in S/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AB} = 2l\dot{\theta}\cos\theta\vec{x}_0 + \dot{\theta}\vec{z}_0 \wedge 2l\vec{y} = 2l\dot{\theta}\cos\theta\vec{x}_0 - 2\dot{\theta}l\vec{x}$

$= 2l\dot{\theta}\cos\theta\vec{x}_0 - 2\dot{\theta}l(\cos\theta\vec{x}_0 + \sin\theta\vec{y}_0)$

d'où :

$$\boxed{\vec{V}(B \in S/R_0) = -2l\dot{\theta}\sin\theta\vec{y}_0}$$

R7- Le torseur cinématique $[\vartheta(S/R_0)]$ au point G est :

$$[\vartheta(S/R_0)] = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(G \in S/R_0) \end{Bmatrix}_G$$

avec :

$$\boxed{\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\theta}\vec{z}_0}$$

et

$$\boxed{\vec{V}(G \in S/R_0) = \vec{V}(A \in S/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AG} = 2l\dot{\theta}\cos\theta\vec{x}_0 + \dot{\theta}\vec{z}_0 \wedge l\vec{y} = l\dot{\theta}(\cos\theta\vec{x}_0 - \sin\theta\vec{y}_0)}$$

R8-

$$\boxed{\vec{\gamma}(A/R_0) = \left[\frac{d\vec{V}(A/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = 2l(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)\vec{x}_0}$$

R9-

$$\boxed{\vec{\gamma}(B/R_0) = \left[\frac{d\vec{V}(B/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = -2l(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\vec{y}_0}$$

R10-

$$\boxed{\vec{V}(P/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right]_{R_0} = (2l-r)\dot{\theta}\cos\theta\vec{x}_0 - r\dot{\theta}\sin\theta\vec{y}_0}$$

R11- Pour $r = l$ (point G) on a :

$$\boxed{\vec{V}(P/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right]_{R_0} = l\dot{\theta}\cos\theta\vec{x}_0 - l\dot{\theta}\sin\theta\vec{y}_0}$$

pour $r = 2l$ (point B) on a :

$$\boxed{\vec{V}(P/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right]_{R_0} = -2l\dot{\theta}\sin\theta\vec{y}_0}$$

Exercice n° 5 : mouvement d'un double pendule

Notions abordées :

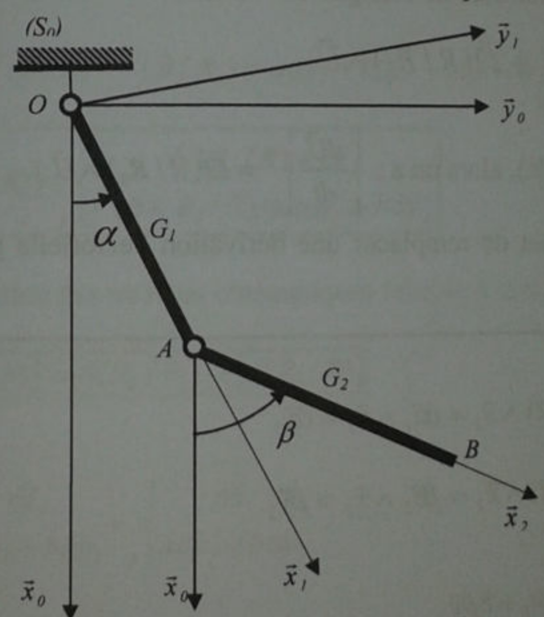
- **Torseur cinématique**
- **Loi de composition des torseurs cinématiques**
- **Loi de composition des mouvements**

On considère un double pendule constitué de deux tiges (OA) et (AB).

- La tige OA, de longueur a, est en liaison pivot d'axe $(O,\vec{z})$ avec le bâti (S_0).
- La tige AB, de longueur b, est en liaison pivot d'axe $(A,\vec{z})$ avec la tige OA.

On considère les trois repères suivants (voir figure) :

- $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est lié au bâti (S_0).
- $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z})$ est lié à la tige OA tel que $\alpha=(\vec{x},\vec{x}_1)$ et $\overrightarrow{OA}=a\vec{x}_1$.
- $R_2(A,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z})$ est lié à la tige AB tel que $\beta=(\vec{x},\vec{x}_2)$ et $\overrightarrow{AB}=b\vec{x}_2$.



Q1- Déterminer le torseur cinématique de la tige *(AB)* dans son mouvement par rapport à (R) au point B : $[\mathcal{V}(AB/R)]_B$.

Q2- Déterminer le torseur cinématique de la tige *(AB)* dans son mouvement par rapport à (R_1) au point B : $[\mathcal{V}(AB/R_1)]_B$.

Q3- Déterminer le torseur cinématique de (R_1) dans son mouvement par rapport à (R) au point B : $[\mathcal{V}(R_1/R)]_B$.

Q4- Vérifier la loi de composition des torseurs cinématiques relative à la tige *(AB)*.

Q5- Calculer l'accélération du point B dans son mouvement par rapport à (R).

Q6- Calculer l'accélération du point B dans son mouvement par rapport à (R_1).

Q7- Calculer l'accélération de Coriolis du mouvement du point B par rapport à (R) et (R_1).

Q8- En déduire l'accélération d'entrainement $\vec{\gamma}(B \in R_1 / R)$.

Solution détaillée

R1- Le torseur cinématique de la tige *(AB)* dans son mouvement par rapport à (R) au point *B* est :

$$[\vartheta(AB/R)] = {}_B\begin{cases} \vec{\Omega}(AB/R) \\ \vec{V}(B \in AB/R) \end{cases}$$

$$\vec{\Omega}(AB/R) = \vec{\Omega}(R_2/R) = \dot{\beta}\vec{z}_2$$

$$\vec{V}(B \in AB/R) = \left[\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right]_R = a\left[\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right]_R + b\left[\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right]_R$$

Rappel de cours : formule de changement de base

$$\left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_R + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{U}$$

Si $\vec{U}$ est fixe dans (R), alors on a : $\left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{R_0} = \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{U}$

Cette relation permet de remplacer une dérivation vectorielle par un simple produit vectoriel.

$$\begin{cases} \left[\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right]_R = \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{x}_1 = \dot{\alpha}\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 = \dot{\alpha}\vec{y}_1 \\ \left[\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right]_R = \vec{\Omega}(R_2/R) \wedge \vec{x}_2 = \dot{\beta}\vec{z}_2 \wedge \vec{x}_2 = \dot{\beta}\vec{y}_2 \end{cases}$$

$$\vec{V}(B \in AB/R) = a\dot{\alpha}\vec{y}_1 + b\dot{\beta}\vec{y}_2$$

d'où :

$$\boxed{[\vartheta(AB/R)] = {}_B\begin{cases} \vec{\Omega}(AB/R) = \vec{\Omega}(R_2/R) = \dot{\beta}\vec{z}_2 \\ \vec{V}(B \in AB/R) = a\dot{\alpha}\vec{y}_1 + b\dot{\beta}\vec{y}_2 \end{cases}}$$

R2- Le torseur cinématique de la tige *(AB)* dans son mouvement par rapport à (R_1) au point *B* est :

$$[\vartheta(AB/R_1)] = {}_B\begin{cases} \vec{\Omega}(AB/R_1) \\ \vec{V}(B \in AB/R_1) \end{cases}$$

Rappel de cours : $\vec{\Omega}(S/R_0)=\vec{\Omega}(S/R)+\vec{\Omega}(R/R_0)$

$$\vec{\Omega}(AB/R_1)=\vec{\Omega}(R_2/R_1)=\vec{\Omega}(R_2/R)+\vec{\Omega}(R/R_1)=\dot{\beta}\vec{z}_2-\dot{\alpha}\vec{z}_1=(\dot{\beta}-\dot{\alpha})\vec{z}_2$$

$$\vec{V}(B\in AB/R_1)=\left[\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right]_{R_1}=b\left[\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right]_{R_1}=b(\vec{\Omega}(R_2/R_1)\wedge\vec{x}_2)=b(\dot{\beta}-\dot{\alpha})\vec{y}_2$$

d'où :

$$\boxed{[\vartheta(AB/R_1)]=_B\begin{cases}\vec{\Omega}(AB/R_1)=\vec{\Omega}(R_2/R_1)=(\dot{\beta}-\dot{\alpha})\vec{z}_2\\ \vec{V}(B\in AB/R_1)=b(\dot{\beta}-\dot{\alpha})\vec{y}_2\end{cases}}$$

R3- Le torseur cinématique de (R_1) dans son mouvement par rapport à (R) au point B est :

$$[\vartheta(R_1/R)]=_B\begin{cases}\vec{\Omega}(R_1/R)\\ \vec{V}(B\in R_1/R)\end{cases}$$

$\vec{\Omega}(R_1/R)=\dot{\alpha}\vec{z}_1$

$\vec{V}(B\in R_1/R)=\vec{V}_e=\vec{V}(B/R)-\vec{V}(B/R_1)=a\dot{\alpha}\vec{y}_1+b\dot{\beta}\vec{y}_2-b(\dot{\beta}-\dot{\alpha})\vec{y}_2=a\dot{\alpha}\vec{y}_1+b\dot{\alpha}\vec{y}_2$

d'où :

$$\boxed{[\vartheta(R_1/R)]=_B\begin{cases}\vec{\Omega}(R_1/R)=\dot{\alpha}\vec{z}_1\\ \vec{V}(B\in R_1/R)=a\dot{\alpha}\vec{y}_1+b\dot{\alpha}\vec{y}_2\end{cases}}$$

R4- La loi de composition des torseurs cinématiques relative à la tige *(AB)* s'écrit :

$$\boxed{[\vartheta(R_2/R)]=[\vartheta(R_2/R_1)]+[\vartheta(R_1/R)]}$$

en effet :

$$_B\begin{cases}(\dot{\beta}-\dot{\alpha})\vec{z}_2\\ b(\dot{\beta}-\dot{\alpha})\vec{y}_2\end{cases}=_B\begin{cases}\dot{\alpha}\vec{z}_1\\ a\dot{\alpha}\vec{y}_1+b\dot{\alpha}\vec{y}_2\end{cases}+_B\begin{cases}\dot{\alpha}\vec{z}_1\\ a\dot{\alpha}\vec{y}_1+b\dot{\alpha}\vec{y}_2\end{cases}$$

R5-

$$\boxed{\vec{\gamma}(B/R)=\left[\frac{d\vec{V}(B/R)}{dt}\right]_R=a\ddot{\alpha}\vec{y}_1-a\dot{\alpha}^2\vec{x}_1+b\ddot{\beta}\vec{y}_2-b\dot{\beta}^2\vec{x}_2}$$

R6-

$$\boxed{\vec{\gamma}(B/R_1)=\left[\frac{d\vec{V}(B/R_1)}{dt}\right]_{R_1}=b(\ddot{\beta}-\ddot{\alpha})\vec{y}_2-b(\dot{\beta}-\dot{\alpha})^2\vec{x}_2}$$

R7-

$$\boxed{\vec{\gamma}_c=2\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\vec{V}_r=2\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\vec{V}(B/R_1)=-2b\dot{\alpha}(\dot{\beta}-\dot{\alpha})\vec{x}_2}$$

R8-

$$\boxed{\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}_a - \vec{\gamma}_r - \vec{\gamma}_c = a\ddot{\alpha}\vec{y}_1 - a\dot{\alpha}^2\vec{x}_1 + b\ddot{\alpha}\vec{y}_2 - b\dot{\alpha}^2\vec{x}_2}$$

Exercice n° 6 : mouvement d'une barre inclinée

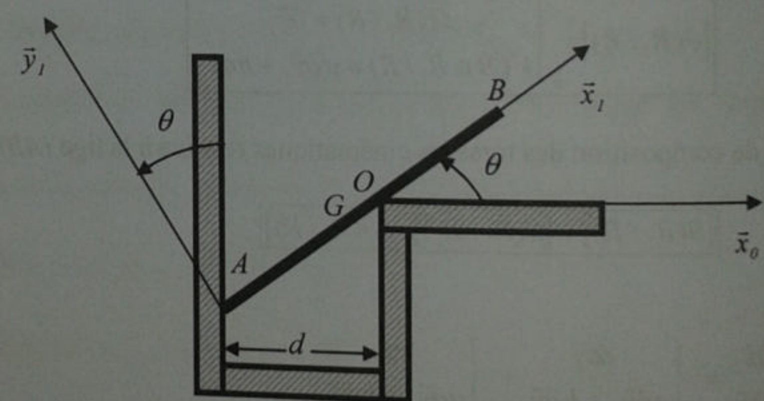
Notions abordées :

- **Lois de composition des mouvements**
- **Torseur cinématique**
- **Axe instantané de rotation et de glissement**

Le système représenté par la figure ci-après est une barre en mouvement tel que l'extrémité A reste constamment en contact avec la droite verticale (suivant l'axe Ay_0).

On prendra R_1 comme repère de projection ; on définit les repères suivants :

- $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$ repère fixe.
- $R_1(A, x_1, y_1, z_1)$ repère lié à la barre.
- $R_G(G, x_0, y_0, z_0)$ repère lié au centre de masse.



Q1- Calculer la vitesse du point B par rapport à (R_0) par composition de mouvement avec R_1 comme repère relatif.

Q2- Calculer la vitesse par rapport à (R_0) du point de la barre se trouvant en O.

Q3- Calculer l'accélération du point B par rapport à (R_0) par composition de mouvement avec R_G comme repère relatif.

On définit le torseur cinématique du système dans un mouvement par rapport à (R_0) au point A :

$$[T]_A = \begin{cases} \vec{\Omega}(R_1 / R_0) \\ \vec{V}(A / R_0) \end{cases}$$

où $\vec{\Omega}(R_1 / R_0)$ est la vitesse instantanée de rotation du système.

Q4- Donner les éléments de réduction du torseur au point A.
Q5- Déterminer l'axe central du torseur.
Q6- En déduire la vitesse en un point de cet axe.
Q7- Quelle est la nature de ce torseur ?
Q8- Que représente ici l'axe central du torseur cinématique ?

Solution détaillée

R1- $\vec{V}(B/R_0)=\vec{V}(B/R_1)+\vec{V}(B\in R_1/R_0)$

$\vec{V}(B/R_1)=\vec{0}$ Et $\vec{V}(B\in R_1/R_0)=\vec{V}(A/R_0)+\vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{OA}=-\frac{d}{\cos\theta}\vec{x}_1\ ;\quad \vec{\Omega}(R_1/R_0)=\begin{cases}0\\0\\\dot{\theta}\end{cases}_{R_1}\ ;\quad \overrightarrow{AB}=\begin{cases}L\\0\\0\end{cases}_{R_1}$$

$$\vec{V}(A/R_0)=\left[\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right]_{R_0}=\left[\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right]_{R_1}+\vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\overrightarrow{OA}=\begin{cases}-\dfrac{d\dot{\theta}\sin\theta}{\cos^2\theta}\\0\\0\end{cases}_{R_1}+\begin{cases}0\\0\\\dot{\theta}\end{cases}_{R_1}\wedge\begin{cases}-\dfrac{d}{\cos\theta}\\0\\0\end{cases}_{R_1}$$

d'où : $$\boxed{\vec{V}(A/R_0)=\begin{cases}-(d\dot{\theta}\sin\theta)/\cos^2\theta\\-(d\dot{\theta})/\cos\theta\\0\end{cases}_{R_1}}$$

$$\boxed{\vec{V}(B/R_0)=\begin{cases}-(d\dot{\theta}\sin\theta)/\cos^2\theta\\-(d\dot{\theta})/\cos\theta\\0\end{cases}_{R_1}+\begin{cases}0\\0\\\dot{\theta}\end{cases}_{R_1}\wedge\begin{cases}L\\0\\0\end{cases}_{R_1}=\begin{cases}-(d\dot{\theta}\sin\theta)/\cos^2\theta\\L\dot{\theta}-(d\dot{\theta})/\cos\theta\\0\end{cases}_{R_1}}$$

R2- Vitesse du point de la barre se trouvant en O :

$$\vec{V}(O/R_0)=\vec{V}(A/R_0)+\vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\overrightarrow{AO}=\left\{\begin{array}{l}-(d\dot{\theta}\sin\theta)/\cos^2\theta\\ -(d\dot{\theta})/\cos\theta\\ 0\end{array}\right._{R_1}+\left\{\begin{array}{l}0\\ 0\\ \dot{\theta}\end{array}\right._{R_1}\wedge\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d}{\cos\theta}\\ 0\\ 0\end{array}\right._{R_1}$$

d'où :

$$\boxed{\vec{V}(O/R_0)=\left\{\begin{array}{l}-(d\dot{\theta}\sin\theta)/\cos^2\theta\\ 0\\ 0\end{array}\right._{R_1}}$$

R3- Accélération du point B par rapport à R_0 avec R_G comme repère relatif :

$$\vec{\gamma}(B/R_0)=\underbrace{\vec{\gamma}(B\in R_G/R_0)}_{\text{acc d'entr.}}+\underbrace{\vec{\gamma}(B/R_G)}_{\text{acc. relat.}}$$

$$\boxed{\vec{V}(G/R_0)=\left[\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_{R_0}=\left[\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_{R_1}+\vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\overrightarrow{OG}=\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{d\dot{\theta}tg\theta}{\cos^2\theta}\\ \dot{\theta}\left(\dfrac{L}{2}-\dfrac{d}{\cos\theta}\right)\\ 0\end{array}\right._{R_1}}$$

$$\vec{\gamma}(G/R_0)=\left[\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt}\right]_{R_0}=\left[\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt}\right]_{R_1}+\vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\vec{V}(G/R_0)$$

$$\left[\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt}\right]_{R_1}=\left\{\begin{array}{l}-d\dot{\theta}^2\left(\dfrac{1}{\cos^3\theta}+\dfrac{tg^2\theta}{\cos\theta}\right)-d\ddot{\theta}\dfrac{tg\theta}{\cos\theta}\\ -d\dot{\theta}^2\dfrac{tg\theta}{\cos\theta}+\ddot{\theta}\left(\dfrac{L}{2}-\dfrac{d}{\cos\theta}\right)\\ 0\end{array}\right._{R_1}$$

$$\vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\vec{V}(G/R_0)=\begin{Bmatrix}0\\0\\\dot{\theta}\end{Bmatrix}_{R_1}\wedge\begin{Bmatrix}-d\,\dot{\theta}\dfrac{tg\theta}{\cos^2\theta}\\ \dot{\theta}\left(\dfrac{L}{2}-\dfrac{d}{\cos\theta}\right)\\0\end{Bmatrix}_{R_1}=\begin{Bmatrix}-\dot{\theta}^2\left(\dfrac{L}{2}-\dfrac{d}{\cos\theta}\right)\\-d\,\dot{\theta}^2\dfrac{tg\theta}{\cos^2\theta}\\0\end{Bmatrix}_{R_1}$$

d'où :

$$\boxed{\vec{\gamma}(G/R_0)=\begin{Bmatrix}-d\,\dot{\theta}^2\left(\dfrac{1}{\cos^3\theta}+\dfrac{tg^2\theta}{\cos\theta}\right)-d\,\ddot{\theta}\dfrac{tg\theta}{\cos\theta}-\dot{\theta}^2\left(\dfrac{L}{2}-\dfrac{d}{\cos\theta}\right)\\-d\,\dot{\theta}^2\dfrac{tg\theta}{\cos\theta}+\ddot{\theta}\left(\dfrac{L}{2}-\dfrac{d}{\cos\theta}\right)-d\,\dot{\theta}^2\dfrac{tg\theta}{\cos^2\theta}\\0\end{Bmatrix}_{R_1}}$$

d'autre part :

$$\vec{GB}=\begin{Bmatrix}\dfrac{L}{2}\\0\\0\end{Bmatrix}_{R_1}\quad\text{et}\quad\vec{V}(B/R_G)=\left[\frac{d\vec{GB}}{dt}\right]_{R_G}=\left[\frac{d\vec{GB}}{dt}\right]_{R_1}+\vec{\Omega}(R_1/R_G)\wedge\vec{GB}$$

mais, comme on a : $\vec{\Omega}(R_1/R_G)=\vec{\Omega}(R_1/R_0)=\begin{Bmatrix}0\\0\\\dot{\theta}\end{Bmatrix}_{R_1}$

alors

$$\vec{V}(B/R_G)=\begin{Bmatrix}0\\\dfrac{L}{2}\dot{\theta}\\0\end{Bmatrix}_{R_1}$$

ce qui donne :

$$\vec{\gamma}(B/R_G)=\left[\frac{d\vec{V}(B/R_G)}{dt}\right]_{R_G}=\left[\frac{d\vec{V}(B/R_G)}{dt}\right]_{R_1}+\vec{\Omega}(R_1/R_G)\wedge\vec{V}(B/R_G)$$

$$\vec{\gamma}(B/R_G) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{L}{2}\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}_{R_1} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{L}{2}\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1} = \begin{Bmatrix} -\frac{L}{2}\dot{\theta}^2 \\ \frac{L}{2}\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1}$$

donc :

$$\boxed{\vec{\gamma}(B/R_0) = \begin{Bmatrix} -d\ddot{\theta}\dfrac{\mathrm{tg}\theta}{\cos\theta} - d\dot{\theta}^2\left(\dfrac{1}{\cos^3\theta} + \dfrac{tg^2\theta}{\cos\theta} - \dfrac{1}{\cos\theta}\right) - L\dot{\theta}^2 \\ L\ddot{\theta} - \dfrac{d\ddot{\theta}}{\cos\theta} - 2d\dot{\theta}^2\dfrac{tg\theta}{\cos\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1}}$$

R4- Torseur cinématique :

$$\boxed{[T] = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\theta}\ \vec{z}_1 \\ \vec{V}(A/R_0) = -d\dot{\theta}\dfrac{tg\theta}{\cos\theta}\ \vec{x}_1 - d\dot{\theta}\dfrac{1}{\cos\theta}\ \vec{y}_1 \end{Bmatrix}_A}$$

R5- L'axe central du torseur dans le repère R_1 est:

$$\boxed{\vec{AI} = \frac{\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(A/R_0)}{\left(\vec{\Omega}(R_1/R_0)\right)^2} + \lambda\vec{\Omega}(R_1/R_0)}$$

avec $\lambda \in IR$

pour $\lambda = 0$ on a un point I_0 de l'axe central :

$$\vec{AI_0} = \frac{\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(A/R_0)}{\left(\vec{\Omega}(R_1/R_0)\right)^2} = \frac{1}{\dot{\theta}^2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}_{R_1} \wedge \begin{Bmatrix} -\dfrac{d\dot{\theta}\sin\theta}{\cos^2\theta} \\ -\dfrac{d\dot{\theta}}{\cos\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1}$$

$$\overrightarrow{AI_0} = \begin{Bmatrix} \dfrac{d}{\cos\theta} \\ -\dfrac{d\sin\theta}{\cos^2\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1}$$

R6- L'axe central du torseur est la droite parallèle à l'axe $\overrightarrow{Az_1}$ et passant par I_0.

$$\vec{V}(I_0/R_0) = \vec{V}(A/R_0) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{AI_0}$$

$$= \begin{Bmatrix} -(d\dot{\theta}\sin\theta)/\cos^2\theta \\ -(d\dot{\theta})/\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}_{R_1} \wedge \begin{Bmatrix} \dfrac{d}{\cos\theta} \\ -\dfrac{d\sin\theta}{\cos^2\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1}$$

R7- Nature du torseur :

c'est un glisseur car : $\vec{\Omega}(R_1/R_0) \bullet \vec{V}(A/R_0) = 0$

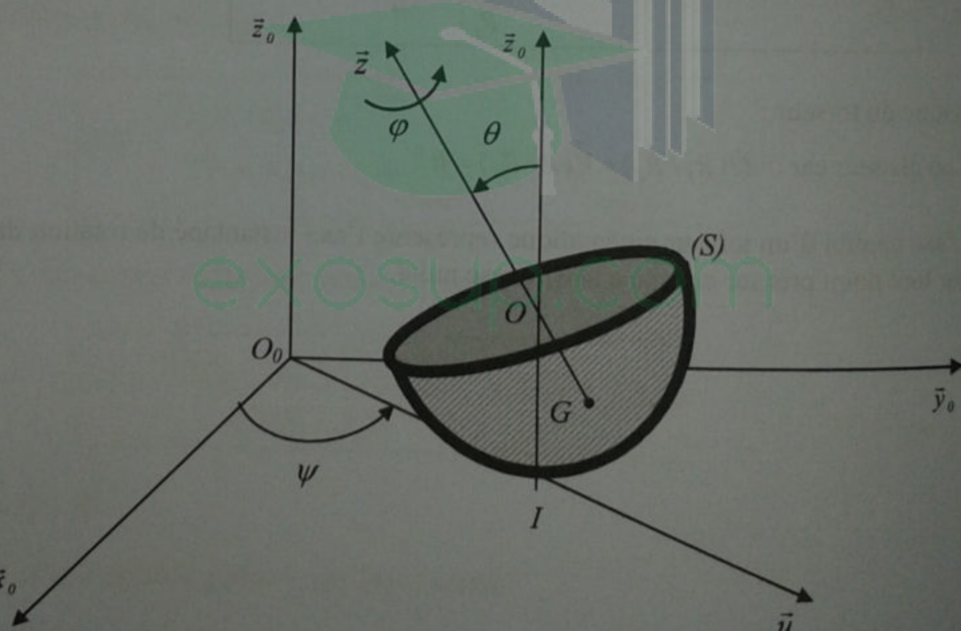
R8- L'axe central d'un torseur cinématique représente l'axe instantané de rotation de la tige, car tout point pris sur cet axe a une vitesse nulle.

Exercice n° 7 : mouvement d'une demi-boule en contact avec un plan fixe

Notions abordées :

- **Paramétrage d'un solide**
- **Torseur cinématique**
- **Axe instantané de rotation et de glissement (AIRG)**
- **Invariant scalaire – Invariant vectoriel**

On considère une demi-boule homogène *(S)*, de rayon R, de masse m et de centre d'inertie G. On note O le centre du cercle de la base et on admettra que $OG = \frac{3R}{8}$. Un repère orthonormé direct $R(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est lié à *(S)* de telle sorte que l'axe $(G,\vec{z})$ soit confondu avec $\overrightarrow{GO}$ et de même sens (voir figure).
Cette demi-boule est en contact ponctuel en I avec le plan $(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ d'un repère orthonormé direct $R_0(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ que l'on suppose galiléen. Le solide *(S)* est situé dans la région $O_0z_0 \geq 0$, le point O restant à la cote $z = R$ dans (R_0).



Q1- Paramétrer la position de la demi-boule en utilisant les angles d'Euler.
Q2- Construire les figures de calcul.
Q3- Déterminer le vecteur instantané de rotation de *(S)* dans son mouvement par rapport à (R_0). Donner ses composantes dans la base $(\vec{u},\vec{w},\vec{z})$.
Q4- Déterminer la condition géométrique de contact entre *(S)* et le plan $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$.
Q5- Quel est alors le nombre de degrés de liberté du système ?
Q6- Calculer la vitesse du centre d'inertie G de *(S)* par ses composantes dans la base $(\vec{u},\vec{w},\vec{z})$.

Q7- Calculer l'accélération du centre d'inertie G de *(S)* par ses composantes dans la base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$.

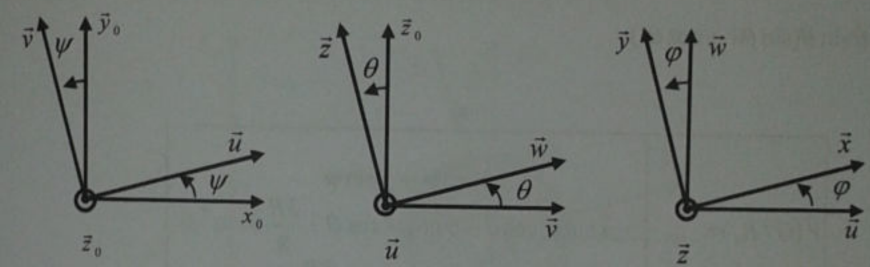
Solution détaillée

R1- La position de *(S)* peut être définie par les coordonnées *(x, y, z)* de G dans (R_0) et par les angles d'Euler (ψ, θ, φ) déterminés par la succession des repères orthonormés directs suivants :

$$R'(G,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0) \xrightarrow{(\psi,\vec{z}_0)} R_1(G,\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0) \xrightarrow{(\theta,\vec{u})} R_2(G,\vec{u},\vec{w},\vec{z}) \xrightarrow{(\varphi,\vec{z})} R(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$$

(R') a ses axes respectivement parallèles à ceux de (R_0) et de même sens.

R2-



R3- Le vecteur instantané de rotation de *(S)* dans son mouvement par rapport à (R_0) est donné par :

$$\boxed{\vec{\Omega}(S/R_0) = \vec{\Omega}(R/R_0) = \vec{\Omega}(R/R_2) + \vec{\Omega}(R_2/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\varphi}\ \vec{z} + \dot{\theta}\ \vec{u} + \dot{\psi}\ \vec{z}_0}$$

avec $R_1(G,\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$ le premier repère intermédiaire et $R_2(G,\vec{u},\vec{w},\vec{z})$ le deuxième repère intermédiaire.

Soit :

$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi}\ \vec{z}_0 + \dot{\theta}\ \vec{u} + \dot{\varphi}\ \vec{z}$$

ou encore dans la base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$:

$$\boxed{\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\psi}\sin\theta\vec{w} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{z}}$$

R4- Le contact géométrique en I est nécessairement traduit par une condition sur les paramètres de position $(x, y, z, \psi, \theta, \varphi)$. Celle-ci est obtenue en exprimant que si le contact a lieu alors :

$$\overrightarrow{O_0I}.\vec{z}_0 = 0$$
$$\Rightarrow (\overrightarrow{O_0G} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OI}).\vec{z}_0 = 0$$
$$\Rightarrow (x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0 + \frac{3R}{8}\vec{z} - R\vec{z}_0).\vec{z}_0 = 0$$

d'où :

$$\boxed{z = R(1-\frac{3}{8}\cos\theta)} \quad (L_g)$$

R5- La condition (L_g) obtenue dans la question 4- permet de réduire le nombre de paramètres de position indépendants de 6 à 5.
Le nombre de degrés de liberté du système est alors 5 qui sont $(x, y, \psi, \theta, \varphi)$.

R6- $$\vec{V}(G/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0G}}{dt}\right]_{R_0} = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 + \frac{3R}{8}\dot{\theta}\sin\theta\vec{z}_0$$

$$= \dot{x}(\cos\psi\vec{u} - \sin\psi\cos\theta\vec{w} + \sin\psi\sin\theta\vec{z}) + \dot{y}(\sin\psi\vec{u} + \cos\psi\cos\theta\vec{w} - \cos\psi\sin\theta\vec{z})$$
$$+\frac{3R}{8}\dot{\theta}\sin\theta(\sin\theta\vec{w} + \cos\theta\vec{z})$$

d'où :

$$\boxed{\vec{V}(G/R_0) = \begin{cases} \dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi \\ -\dot{x}\sin\psi\cos\theta + \dot{y}\cos\psi\cos\theta + \dfrac{3R}{8}\dot{\theta}\sin^2\theta \\ \dot{x}\sin\psi\sin\theta - \dot{y}\cos\psi\sin\theta + \dfrac{3R}{8}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta \end{cases}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}}$$

R7- $$\vec{\gamma}(G/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{V(G/R_0)}}{dt}\right]_{R_0} = \ddot{x}\vec{x}_0 + \ddot{y}\vec{y}_0 + \frac{3R}{8}(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\vec{z}_0$$

$$= \ddot{x}(\cos\psi\vec{u} - \sin\psi\cos\theta\vec{w} + \sin\psi\sin\theta\vec{z}) + \ddot{y}(\sin\psi\vec{u} + \cos\psi\cos\theta\vec{w} - \cos\psi\sin\theta\vec{z})$$
$$+\frac{3R}{8}(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)(\sin\theta\vec{w} + \cos\theta\vec{z})$$

d'où :

$$\boxed{\vec{\gamma}(G/R_0) = \begin{cases} \ddot{x}\cos\psi + \ddot{y}\sin\psi \\ -\ddot{x}\sin\psi\cos\theta + \ddot{y}\cos\psi\cos\theta + \dfrac{3R}{8}(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\sin\theta \\ \ddot{x}\sin\psi\sin\theta - \ddot{y}\cos\psi\sin\theta + \dfrac{3R}{8}(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\cos\theta \end{cases}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}}$$

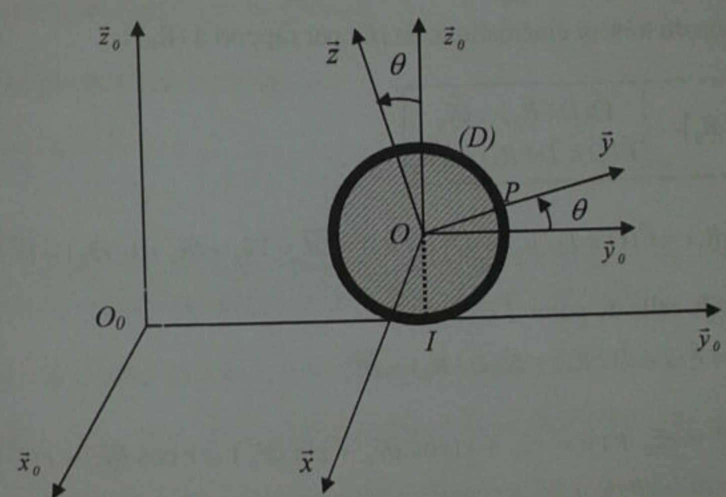
Exercice n° 8 : mouvement d'un disque sur un axe

Notions abordées :

- **Paramétrage d'un solide**
- **Torseur cinématique**
- **Axe instantané de rotation et de glissement (AIRG)**
- **Invariant scalaire – Invariant vectoriel**

Un disque circulaire *(D)*, de rayon r est en mouvement par rapport au repère de référence $R_0(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. Ce disque situé dans le plan $(O_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, est en contact à l'instant t en un point $I \in (D)$ avec l'axe $(O,\vec{y}_0)$ (voir figure).

Le repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est celui lié au disque tel que $\vec{x} // \vec{x}_0$.



Q1- Proposer un paramétrage du disque dans son mouvement par rapport à (R_0).

Q2- Déterminer les éléments de réduction du torseur cinématique $[\vartheta(D/R_0)]$ au centre O du disque.

Q3- Calculer la vitesse du point $I \in (D)$.

Q4- Calculer la vitesse du point $P \in (D)$ tel que $\overrightarrow{OP} = r\vec{y}$ de deux manières différentes :

– à partir de celle du point $I \in (D)$

– à partir de celle du point $O \in (D)$

Q5- Déterminer l'axe instantané de rotation et de glissement (AIRG).

Q6- Déterminer l'invariant scalaire de $[\vartheta(D/R_0)]$. En déduire la nature du torseur cinématique.

Q7- Déterminer l'invariant vectoriel. Commenter le résultat obtenu.

Solution détaillée

R1- Les cordonnées du centre O du disque dans le repère de référence $R_0(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ sont $(X = 0,\ Y,\ Z = r)$ où les composantes X et Z sont constantes. L'angle de nutation $\theta(t) = (\vec{z}_0,\vec{z})$ est non nul, alors que les angles de précession et de rotation propre sont nuls. Il en résulte 4 équations de liaison :

$$\boxed{X = 0,\ Z = r,\ \psi = 0 \text{ et } \theta = 0}$$

la position du disque dépendra donc de 2 paramètres (6 – 4 = 2) qui sont Y et θ.

R2- $\vec{V}(O \in D/R_0)_{R_0} = \left[\dfrac{d\overrightarrow{O_0O}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\dfrac{d(Y\vec{y}_0 + r\vec{z}_0)}{dt}\right]_{R_0} = \dot{Y}\vec{y}_0$

d'où l'expression du torseur cinématique de (D) par rapport à (R_0) :

$$\boxed{[V(D/R_0)] = \begin{cases} \vec{\Omega}(D/R_0) = \dot{\theta}\vec{x}_0 \\ \vec{V}(O \in D/R_0) = \dot{Y}\vec{y}_0 \end{cases}_O}$$

R3- $\vec{V}(I \in D/R_0) = \vec{V}(O \in D/R_0) + \vec{\Omega}(D/R_0) \wedge \overrightarrow{OI} = \dot{Y}\vec{y}_0 + \dot{\theta}\vec{x}_0 \wedge (-r\vec{z}_0) = (\dot{Y} + r\dot{\theta})\vec{y}_0$

R4- – A partir de celle du point $I \in (D)$

$\vec{V}(P \in D/R_0) = \vec{V}(I \in D/R_0) + \vec{\Omega}(D/R_0) \wedge \overrightarrow{IP}$

avec

$\overrightarrow{IP} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OP} = r\vec{z}_0 + r\vec{y} = r\vec{z}_0 + r(\cos\theta\vec{y}_0 + \sin\theta\vec{z}_0) = r\cos\theta\vec{y}_0 + r(1 + \sin\theta)\vec{z}_0$

$\vec{V}(P \in D/R_0) = (\dot{Y} + r\dot{\theta})\vec{y}_0 + \dot{\theta}\vec{x}_0 \wedge r\cos\theta\vec{y}_0 + r(1 + \sin\theta)\vec{z}_0 = (\dot{Y} - r\dot{\theta}\sin\theta)\vec{y}_0 + r\dot{\theta}\cos\theta\vec{z}_0$

– A partir de celle du point $O \in (D)$

$\vec{V}(P \in D/R_0) = \vec{V}(O \in D/R_0) + \vec{\Omega}(D/R_0) \wedge \overrightarrow{OP} = \dot{Y}\vec{y}_0 + \dot{\theta}\vec{x}_0 \wedge r\vec{y} = \dot{Y}\vec{y}_0 + r\dot{\theta}\vec{z}$

or $\vec{z} = \cos\theta\vec{z}_0 - \sin\theta\vec{y}_0$

d'où :

$$\boxed{\vec{V}(P \in D/R_0) = (\dot{Y} - r\dot{\theta}\sin\theta)\vec{y}_0 + r\dot{\theta}\cos\theta\vec{z}_0}$$

R5- L'axe instantané de rotation et de glissement (Δ) est alors défini comme l'ensemble des points $Q \in (R)$ tels que : $\vec{V}(Q \in R/R_0) = \alpha\vec{\Omega}(R/R_0) = \alpha\dot{\theta}\vec{x}_0$

par ailleurs :

$$\vec{V}(Q \in R/R_0) = \vec{V}(O \in R/R_0) + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{OQ}$$

ce qui donne

$$\vec{V}(O \in R/R_0) + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{OQ} = \alpha\dot{\theta}\vec{x}_0$$

la résolution de la division vectorielle permet d'écrire :

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{\dot{\theta}\vec{x}_0 \wedge \vec{V}(O/R_0)}{\dot{\theta}^2} + \lambda\dot{\theta}\vec{x}_0 = \overrightarrow{OQ}_0 + \lambda\dot{\theta}\vec{x}_0$$

avec

$$\overrightarrow{OQ}_0 = \frac{\dot{Y}}{\dot{\theta}}\vec{z}_0$$ (le point Q_0 appartient donc à la droite (OI)).

on écrit finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{OQ} = \frac{\dot{Y}}{\dot{\theta}}\vec{z}_0 + \lambda\dot{\theta}\vec{x}_0}$$

R6- L'invariant scalaire I_S est égal à :

$$I_S = \vec{V}(O/R_0).\vec{\Omega}(D/R_0) = \dot{Y}\vec{y}_0.\dot{\theta}\vec{x}_0 = 0$$

donc le torseur cinématique est un glisseur.

R7- L'invariant vectoriel $\vec{I}_V$ est égal à :

$$\vec{I}_V = \frac{I_S}{\dot{\theta}}\vec{x}_0 = \vec{0}$$

Commentaire

Pour un tel torseur cinématique, l'invariant vectoriel correspond à la vitesse d'un point de l'axe central, si bien que les points de (Δ) ont une vitesse nulle.

Remarque : ce résultat peut être immédiatement vérifié pour le point $Q_0 \in (\Delta)$

par exemple : $\vec{V}(Q_0/R_0) = \vec{V}(O \in R/R_0) + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{OQ_0} = \dot{Y}\vec{y}_0 + \dot{\theta}\vec{x}_0 \wedge \frac{\dot{Y}}{\dot{\theta}}\vec{z}_0 = \vec{0}$

Exercice n° 9 : entraînement d'un plateau circulaire

Notions abordées :

- **Vitesse de rotation**
- **Composition des vecteurs rotation**
- **Vitesse de glissement**
- **Roulement sans glissement**

Un plateau circulaire *(P)*, de centre O et de rayon R, est mis en rotation autour de son axe, à l'aide d'un système constitué d'une tige *(T)*, de longueur $2l$, aux extrémités de laquelle sont articulés deux disques identiques (D_1) et (D_2) de rayons r et de centres respectifs C_1 et C_2.

La tige *(T)* est perpendiculaire à l'axe de rotation et son milieu H est situé sur cet axe sous le plateau *(P)*, à la distance r du point O, de telle sorte que les disques (D_1) et (D_2) soient en contact avec *(P)* aux points géométriques I_1 et I_2 (voir figure). Le plateau, la tige et les deux disques sont des solides homogènes.

On note, respectivement, $\dot{\psi}$ *et* $\dot{\theta}$ les vitesses de rotation de *(P)* et de *(T)* par rapport au référentiel d'étude $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ supposé galiléen.

On désigne par $\dot{\varphi}$ *et* $\dot{\Phi}$ les vitesses de rotation respectivement de *(D₁)* et *(D₂)* par rapport à la tige *(T)*.

Q1- Donner l'expression de la vitesse de rotation $\vec{\Omega}_1$ de (D_1) par rapport à (R).

Q2- Donner l'expression de la vitesse de rotation $\vec{\Omega}_2$ de (D_2) par rapport à (R).

Q3- On bloque la tige *(T)*. Exprimer les vecteurs $\vec{\Omega}_1$ et $\vec{\Omega}_2$.

Q4- Donner l'expression de la vitesse de glissement $\vec{V}_{g1}$ de (D_1) par rapport à *(P)*.

Q5- Donner l'expression de la vitesse de glissement $\vec{V}_{g2}$ de (D_2) par rapport à *(P)*.

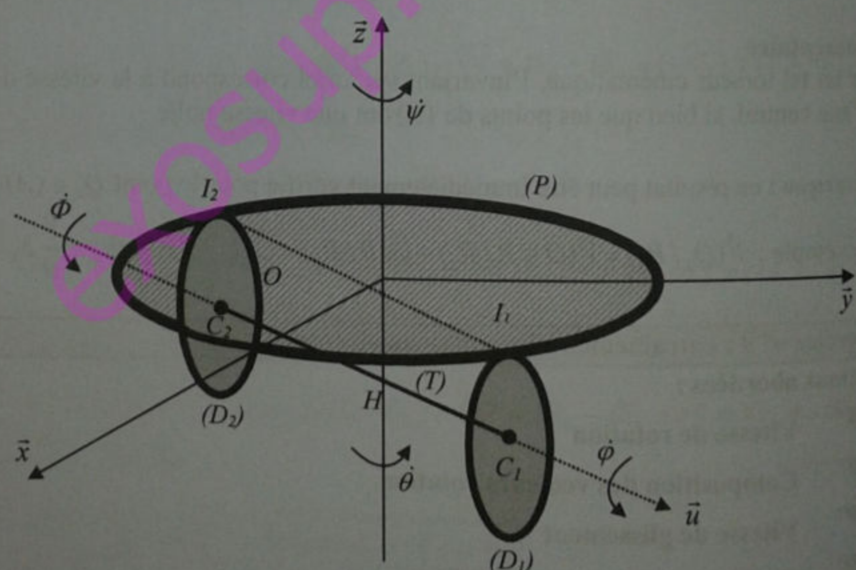
On suppose que le roulement des deux disques (D_1) et (D_2) sur le plateau *(P)* se fait sans glissement.

Q6- Déterminer une relation entre $\dot{\varphi}$ *et* $\dot{\Phi}$.

Q7- On bloque le plateau (P). Exprimer les vecteurs $\vec{\Omega}_1$ et $\vec{\Omega}_2$ et montrer que :

$$\vec{\Omega}_1 = \alpha\overrightarrow{HI_1} \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}_2 = \beta\overrightarrow{HI_2}$$

avec α *et* β à exprimer en fonction de l et $\dot{\varphi}$.



Solution détaillée

R1- Vitesses instantanées de rotation :

$$\boxed{\vec{\Omega}_1 = \vec{\Omega}(D_1/T) + \vec{\Omega}(T/R) = \dot{\varphi}\vec{u} + \dot{\theta}\vec{z}}$$

R2-

$$\boxed{\vec{\Omega}_2 = \vec{\Omega}(D_2/T) + \vec{\Omega}(T/R) = \dot{\Phi}\vec{u} + \dot{\theta}\vec{z}}$$

R3- *(T)* bloquée $\Rightarrow \dot{\theta} = 0$

ce qui donne :

$$\boxed{\vec{\Omega}_1 = \dot{\varphi}\vec{u}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{\Omega}_2 = \dot{\Phi}\vec{u}}$$

R4- Vitesses de glissement:

$\vec{V}_{g1} = \vec{V}(D_1/P) = \vec{V}(I_1 \in D_1/R) - \vec{V}(I_1 \in P/R)$

$\vec{V}(I_1 \in D_1/R) = \vec{V}(C_1/R) + \vec{\Omega}(D_1/R) \wedge \overrightarrow{C_1I_1} = \vec{\Omega}(T/R) \wedge \overrightarrow{OC_1} + \vec{\Omega}_1 \wedge r\vec{z}$

$= (l\dot{\theta} - r\dot{\varphi})\vec{z} \wedge \vec{u}$

$\vec{V}(I_1 \in P/R) = \vec{\Omega}(P/R) \wedge \overrightarrow{OI_1} = l\dot{\psi}\vec{z} \wedge \vec{u}$

d'où : $\boxed{\vec{V}_{g1} = (l\dot{\theta} - r\dot{\varphi} - l\dot{\psi})\vec{z} \wedge \vec{u}}$

R5- $\vec{V}_{g2} = \vec{V}(D_2/P) = \vec{V}(I_2 \in D_2/R) - \vec{V}(I_2 \in P/R)$

$\vec{V}(I_2 \in D_2/R) = \vec{V}(C_2/R) + \vec{\Omega}(D_2/R) \wedge \overrightarrow{C_2I_2} = \vec{\Omega}(T/R) \wedge \overrightarrow{OC_2} + \vec{\Omega}_2 \wedge r\vec{z}$

$= (-l\dot{\theta} - r\dot{\Phi})\vec{z} \wedge \vec{u}$

$\vec{V}(I_2 \in P/R) = \vec{\Omega}(P/R) \wedge \overrightarrow{OI_2} = -l\dot{\psi}\vec{z} \wedge \vec{u}$

d'où : $\boxed{\vec{V}_{g2} = (-l\dot{\theta} - r\dot{\Phi} + l\dot{\psi})\vec{z} \wedge \vec{u}}$

R6- Roulement sans glissement:

$\vec{V}_{g1} = \vec{V}_{g2} = \vec{0}$

$\Rightarrow l\dot{\theta} - r\dot{\varphi} - l\dot{\psi} = 0$ et $-l\dot{\theta} - r\dot{\Phi} + l\dot{\psi} = 0$

d'où :

$$\boxed{\dot{\varphi} + \dot{\Phi} = 0}$$

R7- (P) bloqué

$\Rightarrow \dot{\psi} = 0 \Rightarrow l\dot{\theta} - r\dot{\varphi} = 0$ Et $-l\dot{\theta} - r\dot{\Phi} = 0$ avec $\dot{\varphi} + \dot{\Phi} = 0$

donc :

$$\vec{\Omega}_1 = \dot{\varphi}\vec{u} + \dot{\theta}\vec{z} = \dot{\varphi}\vec{u} + \frac{r}{l}\dot{\varphi}\vec{z} = \frac{\dot{\varphi}}{l}(l\vec{u} + r\vec{z}) = \frac{\dot{\varphi}}{l}(\overrightarrow{HC_1} + \overrightarrow{C_1I_1}) = \frac{\dot{\varphi}}{l}\overrightarrow{HI_1}$$

d'où:

$$\boxed{\alpha = \frac{\dot{\varphi}}{l}}$$

$$\vec{\Omega}_2 = \dot{\Phi}\vec{u} + \dot{\theta}\vec{z} = \dot{\Phi}\vec{u} - \frac{r}{l}\dot{\varphi}\vec{z} = \frac{\dot{\Phi}}{l}(l\vec{u} - r\vec{z}) = \frac{\dot{\Phi}}{l}(\overrightarrow{HC_2} + \overrightarrow{C_2I_2}) = -\frac{\dot{\Phi}}{l}\overrightarrow{HI_2} = \frac{\dot{\varphi}}{l}\overrightarrow{HI_2}$$

donc :

$$\boxed{\beta = -\frac{\dot{\Phi}}{l} = \frac{\dot{\varphi}}{l}}$$

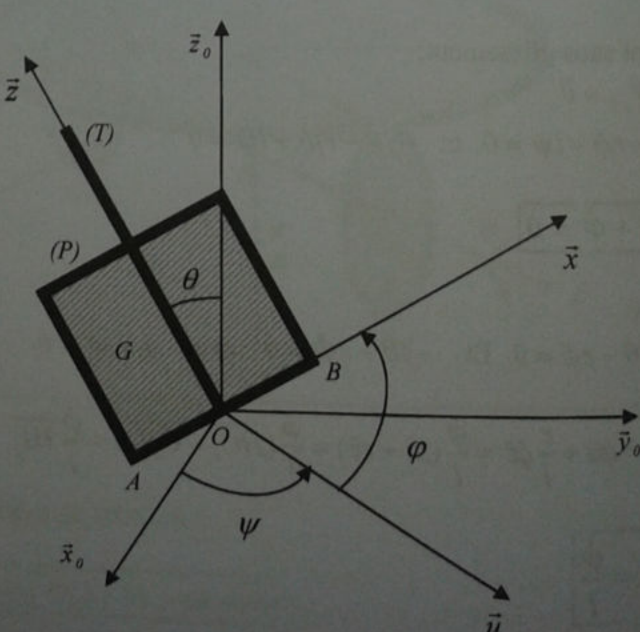
Exercice n° 10 : mouvement d'une tige soudée à une plaque carrée

Notions abordées

- **Figures de calcul**
- **Torseur cinématique**
- **Vecteur instantané de rotation**

On considère un repère orthonormé direct $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ par rapport auquel on étudie le mouvement d'un solide (Σ) constitué :

- d'une tige *(T)* de masse négligeable dont une extrémité passe par *O*, la liaison en *O* étant telle que *(T)* peut tourner autour de $(O, \vec{z}_0)$ en faisant toutefois un angle θ constant avec l'axe $(O, \vec{z}_0)$ ($\theta \neq 0$).
- d'une plaque carrée homogène de masse *m* et de côté *2L*, soudée à *(T)*, de telle sorte que son centre d'inertie *G* soit sur *(T)*, et que *O* soit le milieu de l'un de ses côtés noté *AB*. La liaison en *O* est telle que la plaque peut tourner autour de *OG*, donc autour de *(T)*.



On introduit les vecteurs unitaires suivants :

$$\vec{z} = \frac{\overrightarrow{OG}}{L} \quad ; \quad \vec{u} = \frac{\vec{z}_0 \wedge \vec{z}}{\|\vec{z}_0 \wedge \vec{z}\|} \quad ; \quad \vec{v} = \vec{z}_0 \wedge \vec{u}$$

$$\vec{x} = \frac{\overrightarrow{OB}}{L} \quad ; \quad \vec{w} = \vec{z} \wedge \vec{u} \quad ; \quad \vec{y} = \vec{z} \wedge \vec{x}$$

ainsi que les angles d'Euler habituels :

$$\psi(t) = (\vec{x}_0, \vec{u}) \quad ; \quad \varphi(t) = (\vec{u}, \vec{x}) \quad ; \quad \theta = Cte$$

Q1- Représenter les figures de calcul.

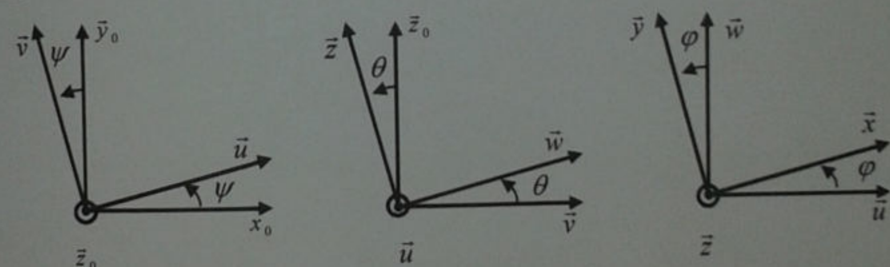
Q2- Déterminer, dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, les composantes du vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}(\Sigma / R_0)$.

Q3- Donner les éléments de réduction en O du torseur cinématique de (Σ) dans son mouvement par rapport à (R_0).

Q4- En déduire les éléments de réduction en G du torseur cinématique de (Σ) dans son mouvement par rapport à (R_0).

Solution détaillée

R1- Figures de calcul :



R2- Composantes, dans $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, du vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}(\Sigma / R_0)$:

$$\vec{\Omega}(\Sigma / R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\varphi}\vec{z} = \dot{\psi}(\cos\theta\vec{z} + \sin\theta\vec{w}) + \dot{\varphi}\vec{z} = \dot{\psi}\sin\theta\vec{w} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{z}$$
$$= \dot{\psi}\sin\theta(\cos\varphi\vec{y} + \sin\varphi\vec{x}) + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{z} = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi\vec{x} + \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi\vec{y} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{z}$$

R3- Les éléments de réduction en O du torseur cinématique de (Σ) dans son mouvement par rapport à (R_0) sont :

$$\boxed{[\vartheta(\Sigma / R_0)] = {}_O\begin{cases} \vec{\Omega}(\Sigma / R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\varphi}\vec{z} \\ \vec{V}(O \in \Sigma / R_0) = \vec{0} \end{cases}}$$

R4- Les éléments de réduction en G du torseur cinématique de (Σ) dans son mouvement par rapport à (R_0) sont :

$$[\vartheta(\Sigma / R_0)] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(\Sigma / R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\varphi}\vec{z} \\ \vec{V}(G \in \Sigma / R_0) \end{array} \right._G$$

avec

$$\vec{V}(G \in \Sigma / R_0) = \vec{V}(O \in \Sigma / R_0) + \vec{\Omega}(\Sigma / R_0) \wedge \overrightarrow{OG} = \vec{0} + (\dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\varphi}\vec{z}) \wedge L\vec{z}$$
$$= L\dot{\psi}\sin\theta\vec{u}$$

d'où :

$$\boxed{[\vartheta(\Sigma / R_0)] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(\Sigma / R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\varphi}\vec{z} \\ \vec{V}(G \in \Sigma / R_0) = L\dot{\psi}\sin\theta\vec{u} \end{array} \right._G}$$